SECTION 20.
ARCHITECTURE AND CONSTRUCTION

Сович Юлія Вікторівна
асистент кафедри опору матеріалів
Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна

РЕДУКОВАНА МОДЕЛЬ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛАХ

Одним з найважливіших етапів розв'язання вісесиметричної задачі теорії термопружності є аналіз нестаціонарного температурного поля. Для моделювання фізичних процесів в таких задачах використовуються рівняння теплопровідності в частинних похідних. Розв'язання таких рівнянь в багатовимірній постановці є складним обчислювальним процесом. Для спрощення цього процесу було запропоновано модифікований метод прямих. Для цього застосовується проекційний метод зниження вимірності за просторовою координатою [1–3]. У даній роботі показано алгоритм застосування базисних функцій та проаналізовано їх вплив на структуру редукованих рівнянь. Приділено особливу увагу до застосування метричних тензорів і взаємного базису, які дають змогу звести вихідні рівняння до системи редукованих рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу. Це дозволяє мінімізувати втрату точності на етапі зниження вимірності рівнянь та отримати редуковану модель без втрати фізичного змісту вихідної задачі. Розглядається задача нестаціонарної теплопровідності для вісесиметричного тіла в циліндричній системі координат. З урахуванням осьової симетрії задача зводиться до двовимірної постановки. Для радіальної координати вводиться заміна $x = r - r_0$,

де r_0 *- внутрішній радіус області. Тоді шукані функції залежать від змінних (*x, z, t*) і не залежать від кутової координати* θ.

Вихідні рівняння теплопровідності:

$$q_x = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad q_z = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial z}, \tag{1}$$

$$c\frac{\partial T}{\partial t}=-\frac{1}{r_0+x}q_x-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_z}{\partial z}+q_0, \tag{2}$$

де $T(x,z,t)$ *- температура;* q_x, q_z *- компоненти вектора теплового потоку;* t *- час;* λ_T *- коефіцієнт теплопровідності; с - об'ємна теплоємність матеріалу,* q_0 *- інтенсивність джерел тепла.*

Початкова умова задається у вигляді розподілу температури в момент часу t :

$$T(x,z,0)=T_0(x,z) \tag{3}$$

Граничні умови формулюються з урахуванням конвективного теплообміну за законом Ньютона–Ріхмана (умови III роду):

$$-\lambda_T\frac{\partial T}{\partial n}=\alpha(T-\theta_c), \tag{4}$$

Для зниження вимірності рівнянь за координатою z застосовується проекційний метод. Використовуються локальні базисні функції $\varphi_i(z)$ [1, 2]. Функція температури представляється у вигляді:

$$T(x,z,t)\approx\sum T^i(x,t)\varphi_i(z), \tag{5}$$

де $T^i(x,t)$ *- модові коефіцієнти, що для локального базису мають зміст вузлових температур за координатою z.*

Для редукції вихідних рівнянь використовується скалярний добуток:

$$(f,g)=\int_{-h}^{h}f(z)g(z)dz, \tag{6}$$

Для побудови проєкційної схеми використовується взаємний базис, що забезпечує коректне проєктування рівнянь на обрану систему функцій $\varphi^j(z)$.. Він дозволяє правильно врахувати властивості системи функцій. Взаємозв'язок між базисом і взаємним базисом задається через метричні:

$$g_{ij}=(\varphi_i,\varphi_j),\;\; g^{ij}=(\varphi^i,\varphi^j),\;\; (\varphi_i,\varphi^j)=\delta_i^j,\;\; b_{ij}=(\varphi_i,\varphi_j'). \tag{7}$$

де δ_i^j *- символ Кронекера, коефіцієнт* $b_{ij}=(\varphi_i,\varphi_j')$ *- показує, як похідна базисної функції* φ_j *проєктується на функцію* φ_i. *Рівняння теплового балансу* *у коефіцієнтах розкладу набувають вигляду:*

$$q_x^i = -\lambda_T \frac{\partial T^i}{\partial x}, \qquad q_z^i = -\lambda_T g^{i\alpha} b_{\alpha\beta} T^{\beta} \tag{8}$$

$$c\frac{\partial T^i}{\partial t} = -\frac{\partial q_x^i}{\partial x} - \frac{1}{r_0 + x} q_x^i - g^{i\alpha} b_{\alpha\beta} q_z^{\beta} + q_0^i \tag{9}$$

Після підстановки (8) в (9) маємо:

$$c\frac{\partial T^i}{\partial t} = -\frac{\partial q_x^i}{\partial x} - \frac{1}{r_0 + x} q_x^i + \lambda_T g^{i\alpha} b_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} b_{\gamma j} T^j + q_0^i \tag{10}$$

Така методика дозволяє істотно зменшити розмірність задачі. Для подальшого розв'язку редукованої задачі застосовуються чисельні методи.

Висновки. Застосування проекційних методів дозволяє знизити вимірність вихідної задачі. Двовимірна задача редукується до системи рівнянь в коефіцієнтах. Це суттєво спрощує чисельну реалізацію. Використання локальних базисних функцій дозволяє імплементувати ефективне співвідношення між точністю отриманого розв'язку та трудоємністю алгоритму [1-3]. Разом з тим, питання збіжності редукованої моделі потребує окремого розгляду з урахуванням впливу параметрів дискретизації на результат розв’язання конкретних крайових задач.

Список використаних джерел:

1. Левківський Д. В., Сович Ю. В. Застосування узагальненого методу прямих для дослідження теплового поля вісесиметричних тіл // Містобудування та територіальне планування : наук.-техн. зб. / Київ. нац. ун-т буд-ва і архіт.; відп. ред. М. М. Осєтрін. Київ : КНУБА, 2019. Вип. 69. С. 207–214.
2. Левківський Д. В., Каверин К. О., Сович Ю. В. Дослідження точності модифікованого методу прямих при розрахунку вісесиметричних тіл // Опір матеріалів і теорія споруд : наук.-техн. зб. Київ : КНУБА, 2019. Вип. 103. С. 243–252.
3. Чибіряков В. К., Станкевич А. М., Кошевий О. П. та ін. Чисельна реалізація модифікованого методу прямих // Містобудування та територіальне планування : наук.-техн. зб. Київ : КНУБА, 2020. Вип. 74. С. 341–359.